

$$(x + 2)(x - 2) + x(x - 1) = x^2 - 2$$

$$x^2 - 4 + x^2 - x = x^2 - 2$$

Se obtiene una ecuación cuadrática por lo que igualamos a cero.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad x + 1 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ó} \quad x = -1$$

Para $x = 2$ los denominadores $x - 2$ y $x^2 - 2x$ se anulan, y como la división por cero no está definida $x = 2$ no está en el dominio de la ecuación y es una raíz extraña. Por tanto la solución es $x = -1$.

b) Es una ecuación con radicales. Como la variable aparece bajo el signo radical, racionalicemos la ecuación.

$$\sqrt{5x + 1} + \sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{5x + 1} = 1 - \sqrt{x}$$

se aisló un radical

$$5x + 1 = (1 - \sqrt{x})^2$$

elevando al cuadrado

$$5x + 1 = 1 - 2\sqrt{x} + x$$

$$4x = -2\sqrt{x}$$

aislando el segundo radical

$$2x = -\sqrt{x}$$

$$4x^2 = x$$

elevando al cuadrado

$$4x^2 - x = 0$$

$$x(4x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad 4x - 1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{4}$$

Comprobación:

para $x_1 = 0$

$$\text{M.I.: } \sqrt{5(0) + 1} + \sqrt{0} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{M.D.: } 1$$

$$\text{M.I.} = \text{M.D.}$$

para $x_2 = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \text{M.I.: } \sqrt{5\left(\frac{1}{4}\right) + 1} + \sqrt{\frac{1}{4}} &= \sqrt{\frac{5}{4} + 1} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

M.D: 1

M.I. $\neq$ M.D.

La solución de la ecuación es $x = 0$

c) Es una ecuación logarítmica.

$$\log (x + 4) + \log (2x + 3) = \log (1 - 2x)$$

aplicando
propiedades
de los loga-
ritmos

$$\log [(x + 4)(2x + 3)] = \log (1 - 2x)$$

$$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x$$

$$2x^2 + 11x + 12 = 1 - 2x$$

$$2x^2 + 13x + 11 = 0$$

$$(2x + 11)(x + 1) = 0$$

$$2x + 11 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x_1 = -\frac{11}{2} = -5,5$$

$$x_2 = -1$$

Para $x_1 = -5,5$ $\log (x + 4)$ y $\log (2x + 3)$ no están definidos, pues resultan $\log (-1,5)$ y $\log (-8)$; luego la solución es $x_2 = -1$.

d) Es una ecuación exponencial.

$$\frac{2^{x^2}}{2^{2x}} = 8^{x-2}$$

$$2^{x^2-2x} = (2^3)^{x-2}$$

aplicando prop. de las potencias
y transformando en base 2

$$2^{x^2-2x} = 2^{3x-6}$$

$$x^2 - 2x = 3x - 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad ; \quad x - 3 = 0 \quad \text{de donde} \quad x = 2 \quad \text{ó} \quad x = 3$$

Los valores de x hallados satisfacen la ecuación original, luego las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

e) Es una ecuación trigonométrica.

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 3 = 0$$

Se reduce a una ecuación cuadrática, donde la variable es la función $\operatorname{sen} x$.

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 3 = 0$$

$$(2 \operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 3) = 0 \quad \text{se factorizó el trinomio}$$

$$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \operatorname{sen} x + 3 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = -3 \text{ imposible, pues } -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

luego, las soluciones son: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
con $k \in \mathbb{Z}$. ■

Ejercicios. (epigrafe 3)

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4 + 4(4x - 9) = 8(x - 1) + 4(x - 3)$

b) $\frac{x+2}{x} = 2$

c) $\frac{1}{2}(x-1) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}$

d) $2y - 5[3y - 7(4y - 9)] = 66$

e) $z - 2(1 - 3z) = 6 + 3(1 - z)$

f) $0,7x - 0,3 = 0,05x + 1$

g) $5(x+1) - 3(x+7) = 2x + 4$

h) $3(x-5) - 7(3-2x) = 11 + 3(2x-12)$

i) $(x+1)(2x+1) = (x+3)(2x+3) - 4$

j) $0,2(x-1) + 0,5(3x-9) = \frac{x}{3} - 2$

k) $(x+1)(x-1) - (x+6)^2 = 1,5$

l) $1 - (x-5)^2 - (4+x)^2 = (1+2x)(\frac{1}{2} - x)$

m) $15y(y-1) = (y+2)^3 - (y-3)^3$

n) $2(x^2 - 2,5) = (x+1)^2 + (x-2)^2$

ñ) $\frac{3y-2}{5} = 4 - \frac{1}{2}y$

o) $\frac{x-8}{7} + \frac{x-3}{5} = -\frac{5}{2}$

p) $\frac{x+4}{14} = 2 - \frac{x-4}{6}$

q) $\frac{0,75-x}{3} - \frac{0,47+2x}{5} = \frac{4,4x}{1,5}$

r) $\frac{3x+5}{6} - \frac{5x+4}{9} = 1 - \frac{x}{18}$

s) $3(x-1) - \frac{2x-3}{4} + \frac{11}{6} = \frac{4x-1}{3} + x + \frac{1}{12}$

2. Halla el conjunto solución de:

a) $x(x+9) = 2x - 12$

b) $(x+2)(x-3) + 9x = 3(x^2 - 5) - 1$

$$c) (x + \frac{1}{2})(\frac{x}{9} + 2) = 0$$

$$d) 2(x^2 + \frac{5}{2}x) = -2$$

$$e) 4x(x + 2) - 5 = 12 - (x - 4)^2$$

$$f) (x + 2)^2 = 2x(x + 2) + 12$$

$$g) 15x = 3(2 - 3x^2)$$

$$h) (3x - 5) - (5 - 3x) = 20$$

$$i) 2x(3x + 5) = -(2x + 5)^2$$

$$j) 9(a - 1)^2 + (a + 1)^2 = 6(a^2 - 1)$$

$$k) (5x - 4)^2 - (3x + 5)(2x - 1) = 20x(x - 2) + 27$$

$$l) (2t - 3)^2 - (t + 5) = 23$$

$$m) (2x + 1)^2 - 5(2x + 1) + 4 = 0$$

$$n) 9t + 1 = 3(t^2 - 5) - (t - 3)(t + 2)$$

$$ñ) 3(x - 2)^2 - \frac{3(2 - x^2)}{4} = x - \frac{3}{2}$$

3. Determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{5(x - 1)}{x + 1} = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

$$b) \frac{5}{x - 2} + \frac{x - 6}{(x - 2)^2} = 2$$

$$c) \frac{4}{3(x^2 - 1)} + \frac{5}{9} = \frac{5}{x + 1} - \frac{2}{3}$$

$$d) \frac{2}{x - 2} - \frac{3}{2x - 4} = \frac{x}{3x - 6} - \frac{1}{2}$$

$$e) \frac{7}{x + 1} + \frac{5}{x + 3} = \frac{70}{x^2 - 4x + 3}$$

$$f) \frac{2}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{8}{x^2 - 1}$$

$$g) \frac{x + 1}{3x - 6} - \frac{x - 1}{2x + 4} = \frac{10 - x^2}{6x^2 - 24}$$

$$h) \frac{3x - 1}{2x - 1} + \frac{3x + 2}{2x + 1} = 3 - \frac{1}{4x^2 - 1}$$

$$i) 5 - \frac{x - 13}{x} = \frac{10(5x + 3)}{x^2}$$

$$j) \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2 + \frac{x + 1}{x - 1} = 6$$

$$k) \frac{3x + 1}{8} + \frac{x - 8}{3x - 1} = \frac{17}{12}$$

$$1) 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 3 \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$m) \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{x}}{1 - x} = 1 + x + \frac{1}{x}$$

4. En las siguientes fórmulas, despejar las letras que se indican:

$$a) m = \frac{n}{3} (r + p) ; \text{despejar } r$$

$$b) V = \frac{1}{3} \pi r^2 ; \text{despejar } r$$

$$c) b = a + (c + 3)d ; \text{despejar } c$$

$$d) s = \frac{t + 1}{t} ; \text{despejar } t$$

$$e) e = v_0 + \frac{1}{2} at^2 ; \text{despejar } a$$

$$f) E = \frac{F}{\frac{G}{3} - H} ; \text{despejar } H$$

$$g) y = \sqrt{2x + 3} ; \text{despejar } x$$

$$h) 5 + \sqrt{3 - u} = 2p ; \text{despejar } u$$

$$i) e^{2t} = 8 ; \text{despejar } t$$

$$j) \log x = a + 2 ; \text{despejar } x$$

$$k) a = \frac{e}{c + f} ; \text{despejar } c$$

$$l) m = \frac{2np}{1 - 2p} ; \text{despejar } p$$

5. Determina el valor de λ para que se cumpla cada una de las siguientes igualdades:

$$a) \frac{2a}{3} = \frac{4a^2}{\lambda}$$

$$b) \frac{9x^2}{5} = \frac{\lambda}{20a}$$

$$c) \frac{3(x - a)}{\lambda} = \frac{-3(x - a)}{x + a}$$

$$d) \frac{x - y}{6(x^2 - 2xy + y^2)} = \frac{\lambda}{12}$$

$$e) \frac{\sqrt{a^2 - 25}}{\lambda} = \frac{\sqrt{3a^2 + 15a}}{\sqrt{6a}}$$

6. Para qué valores de k en las ecuaciones

$$3x^2 - kx + 3 = 0 ; \frac{x(x - 2k)}{k + 9} = -k \text{ las soluciones son:}$$

a) Reales.

b) Complejas.

7. Sin resolver la ecuación, determina el carácter de las raíces de $2x^2 - 6x + 3m = 0$ si: a) $m = 2$ b) $m = \frac{3}{2}$.

8. Para qué $x \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes igualdades:

a) $3 + 5\sqrt{x} = 13$

b) $\sqrt{x+5} + 1 = x$

c) $\sqrt{x^2 - 5x - 13} - 1 = 0$

d) $4 + \sqrt{2x+3} = x - 2$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 7$

f) $2\sqrt{x} - \sqrt{x+5} = 1$

g) $4x - 3\sqrt{x} = 27$

h) $\sqrt{x^2 - 7} + 1 = x$

i) $\frac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} = 2$

j) $\sqrt{x+9} = 1 + \sqrt{x}$

k) $\sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{x-6}$

l) $3\sqrt{x} - \sqrt{5x-4} = 2$

m) $\sqrt{x+4} - \sqrt{5x+24} = 4$

n) $\sqrt{x+13} - \sqrt{x-2} = 3$

ñ) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$

o) $\sqrt{x+10} + \sqrt{x+3} = \sqrt{4x+25}$

p) $\sqrt{x+8} = \sqrt{4x-3} - \sqrt{x+3}$

q) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} - \sqrt{3x-2} = 0$

r) $x - \sqrt{9+x\sqrt{x^2-3}} = 3$

s) $1-x = \sqrt{1-x\sqrt{4-7x^2}}$

t) $(x+1)^{\frac{1}{2}} = 2 + (x-7)^{\frac{1}{2}}$

u) $\sqrt{x+5} - (x-2)^{\frac{1}{2}} = 1$

v) $\sqrt{\sqrt{x-3} - x} = 1$

w) $\sqrt{3 + \sqrt{4x+12}} = 3$

x) $\frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{4x-3}$

y) $\sqrt{\sqrt{3x-5} + \sqrt{3x-14}} = 3$

z) $\sqrt{x^2+9} + \frac{15}{\sqrt{x^2+9}} = 8$

9. Halla los puntos de intersección entre las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$; $q(x) = -x - 3$

b) $g(x) = \sqrt{x + 5}$; $h(x) = x - 7$

c) $y = \sqrt{2x - 1}$; $h(x) = \sqrt{x + 4}$

d) $y = \sqrt{3x^2 + x - 3}$; $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 6}$

e) $h(x) = \sqrt{2x - 6}$; $p(x) = \sqrt{5x - 3}$

f) $y = 2\sqrt{x} - 1$; $y = \sqrt{2x + 1}$

10. Si $f(x) = \frac{\sqrt{2x + 5}}{x + 1}$; $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 6}}{x + 1}$

a) Determina el dominio de f y g .

b) Halla los valores de x que satisfacen la condición $f(x) = g(x)$.

11. Demuestra que $y = \frac{-a^2}{2a + b}$ es solución de la ecuación $(y + a)^2 = y(y - b)$. Determina los valores que no puede tomar dicha solución.

12. Para qué valores de "a" y "b" la ecuación:

$$(x - a)(x - b) = -(x + a)(x - 2a) = b(a - 2) + 3a$$

tiene solución en el dominio de los números reales.

13. Determina los ceros de las siguientes funciones:

(punto 15 del Memento)

a) $f(x) = 1 - 4 \cos^2 x$

b) $g(x) = 4 \sin^2 x + 1 - 4 \sin x$

c) $h(x) = 2(1 - \sin^2 x) - 3 \sin x$

d) $r(x) = \tan x (6 \tan x + 11) - 10$

e) $s(x) = \sin x (1 - \sin x) + \frac{3}{4}$

f) $p(x) = \sqrt{2(1 - \cos^2 x)} + \cos x$

g) $n(x) = (1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x - \frac{5}{8}$

h) $q(x) = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} - \frac{2}{\tan x} + 1$

i) $t(x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \tan x - 2$

$$j) v(x) = \sqrt{\sin x} - \sin x$$

14. Resuelve:

$$a) 7^{x+3} - 49^x = 0$$

$$b) 8^{x-2} = 2\sqrt{2}$$

$$c) 5 \cdot 3^{x+\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$d) 2 \log x = \frac{1}{3} \log 2 + \frac{1}{3} \log 32$$

$$e) \log_2(7x - 13) = 4 \log_2 3 - \log_2 27$$

$$f) \log(6x - 2) + \log 2 = 3 \log 2$$

$$g) 4^{x^2} \cdot 64 = \frac{4^3}{\sqrt{4^7}}$$

$$h) 3 \cdot 5^{3x^2+4x} = 3 \cdot 5^4$$

$$i) 3^{2x} + 9 = 10 \cdot 3^x$$

$$j) 10^{3x-4} = 0,1$$

$$k) \left((\sqrt{2})^x \right)^{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$l) \log(4x^2 - 15) = \cos \frac{3\pi}{2}$$

$$m) 2^{x^2-8x} = \log_9 \left(\tan \frac{\pi}{4} \right)$$

$$n) \left(\left(\frac{1}{2} \right)^8 \right)^{2-x} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$ñ) \log(x - 2) = \log(9x - 18) + \log_9 3$$

$$o) \log(x - 2) + \log(x - 3) = 1 - \log 5$$

$$p) e^{\frac{3x}{2}-1} = 1$$

$$q) \frac{\log(3x - 5)}{\log(3x^2 + 25)} = \frac{1}{2}$$

$$r) \log_2(x + 5) - \log_2 x = 5 + \log_2 3$$

$$s) \log(x - 2) + \log(x - 3) = 1 - \log 5$$

$$t) \log_x(2x^2 - 4x + 3) = 2$$

15. Determina ceros y polos de las siguientes funciones:
(punto 15 del Memento).

$$a) f(x) = \frac{x(x^2 - 1)}{x - 3}$$

$$b) g(y) = \frac{\log y}{y + 1}$$

$$c) t(x) = (x^2 - 4) \sin x$$

$$d) q(t) = \frac{(4 - t)\sqrt{t}}{4}$$

$$e) g(x) = \frac{x-4}{x\sqrt{4-x}}$$

$$f) p(m) = \frac{4-3m}{8\sqrt{m}}$$

$$g) q(n) = \frac{2n^2-3n-14}{n^2+7n+12}$$

$$h) h(x) = \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-4x+3}$$

$$i) f(z) = \frac{\sqrt{2z+3}-3}{\log[z(4z+5)-5]}$$

$$j) s(x) = \frac{\cos^2 x - \sqrt{5} \cos x}{\sin x + (\sin x - \sqrt{3}) \sin x}$$

$$k) k(a) = \frac{a\sqrt{a+3}-2}{a^3-4a^2+a+6}$$

$$l) n(x) = \frac{(x+1)e^{x^2+5x+6}}{x^2+4}$$

16. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

$$a) 1 - \sqrt{1-x^2} = x^2$$

$$b) x^3 - 4x^2 + 6 + x = 0$$

$$c) 2^{\log_2(x-3)} = 2x - 5$$

$$d) \log_2(x+1) + \log_4(x+1) = 0$$

$$e) x(x-5) - x^2 + 3(x+8) = 24$$

$$f) \frac{6}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x-1}$$

$$g) \log_x(2x^2-7x+12) = 2$$

$$h) \frac{\log(2x-5)}{\log(x^2-8)} = 0,5$$

$$i) \frac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4}$$

$$j) \sin x + \sin x (\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$k) \tan^2 x + \sqrt{2} \tan x - 1 = 0$$

17. Determina si existen los extremos locales de las funciones siguientes:

$$a) f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + 5$$

$$b) g(x) = x^2(x-12)^2$$

$$c) p(x) = x e^x$$

$$d) q(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$$

$$e) m(x) = \frac{1}{2}(2-x)\sqrt{x} \qquad f) n(x) = \frac{6-2x}{12\sqrt{x}}$$

18. Según datos tomados del libro "La crisis económica y social del mundo" se estima que en los fondos marinos existen 6 300 millones de toneladas entre cobre, cobalto y manganeso. El número de toneladas de manganeso es 25 veces el de cobre y el número de toneladas de cobalto es la cuarta parte del cobre. ¿Cuántos millones de toneladas de cada uno de estos minerales hay?
19. Halla la amplitud de los ángulos interiores de un triángulo si se conoce que uno de estos es el doble del primero aumentado en 5 y el tercero es igual al triplo del primero disminuido en 11.
20. Calcula la longitud del lado de un cuadrado, sabiendo que si aumentara en 2,0 dm el área del cuadrado aumentaría en 35 dm².
21. El perímetro de una sala rectangular es de 56 m. Si el largo se hubiera disminuido en 2,0 m la sala sería cuadrada. Halla las dimensiones de la sala.
22. Una persona gasta en un viaje $\frac{1}{3}$ de los ahorros para sus vacaciones, después, en medicinas $\frac{1}{4}$ de lo que le quedaba y del sobrante gasta $\frac{1}{4}$ en libros, quedándole finalmente \$ 81, ¿cuánto tenía ahorrado?
23. Un viajero recorre cada día una distancia igual a $\frac{2}{3}$ de lo recorrido el día anterior. Si en tres días recorrió 57 km, ¿cuántos km recorrió el primer día?
24. En una cartera hay \$ 280 en billetes de \$ 5, \$ 10 y \$ 20. Al contar el número de billetes se determinó que eran 26, y que entre ellos había igual número de billetes de \$ 5 que de \$ 20, ¿cuántos billetes de cada denominación hay en la cartera?
25. Se divide un ángulo recto en tres ángulos desiguales, el segundo es el doble del primero y el tercero es igual al triplo del primero menos 12°. Calcula la am-